Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА:

аналитическая геометрия в пространстве и начала анализа

ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО
для студентов экономических специальностей вуза

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2011

УДК 512 : 514.123.1(076)
ББК 22.1 я73
В 937

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук А. И. Рябченко;
кафедра алгебры и геометрии УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

В 937 **Высшая математика: аналитическая геометрия в пространстве и начала анализа** : практическое руководство / А. В. Бузланов, Е. Н. Бородич, Р. В. Бородич, Т. В. Бородич; М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2011. – 48 с.
ISBN 978-985-439-592-0

В практическом руководстве рассматриваются теоретические проблемы аналитической геометрии в пространстве; предел функции; производная и дифференциал функции. Даются примеры, задания, вопросы для самостоятельного изучения и самоконтроля.

Адресовано студентам экономических специальностей вуза.

УДК 512 : 514.123.1(076)
ББК 22.1 я73

ISBN 978-985-439-592-0

Содержание

Введение

Математика – одна из самых древних наук. **Основные особенности математики – абстрактность, логическая строгость, исключительная широта её приложений.** Абстракция свойственна не только математике. Но если в других науках для доказательства утверждений исследователи постоянно обращаются к опыту, то в математике справедливость утверждения доказывается не проверкой его на примерах, а логическим путём рассуждений и строгих математических выкладок. Без применения математических методов была бы невозможна современная техника. Точные науки (астрономия, механика, физика, химия) развивают свои теории, используя математический аппарат, их прогресс был бы немыслим без математики. Наиболее значительным научным достижением было внедрение математических методов в экономическую науку. Эффективное управление экономическими процессами может быть осуществлено, только на основе применения точных математических методов во всех сферах народного хозяйства – от прогнозирования размещения полезных ископаемых до изучения спроса на товары широкого потребления и бытовые услуги, от изучения потребности в рабочей силе до планирования транспортных артерий, пассажирских перевозок и т. д. **Современный экономист, финансист, бухгалтер должен не только знать основы математики, но и хорошо владеть новейшими математическими методами исследования,** которые могут применяться в области его деятельности.

1 Элементы аналитической геометрии в пространстве

1.1 Плоскость в пространстве

Определение 1.1. Уравнением поверхности в заданной системе координат в пространстве называется такое уравнение с тремя переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки данной поверхности и только они.

Поверхность, определяемая алгебраическим уравнением n-й степени относительно декартовых координат, называется **поверхностью *n*-го порядка.** Мы рассмотрим поверхности 1-го и 2-го порядков.

1.1.1 Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть дана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и ненулевой вектор $\overline{n} = (A, B, C)$. Требуется составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно указанному вектору $\overline{n}$ (рисунок 1.1). В таком случае вектор $\overline{n}$ называют **нормальным** вектором плоскости.

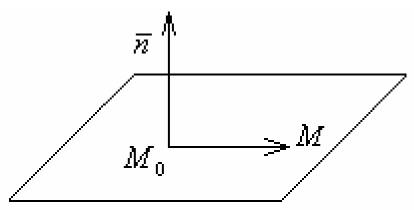

Рисунок 1.1

Пусть $M(x; y; z)$ – произвольная точка плоскости. Так как вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ лежит на плоскости, то он перпендикулярен вектору $\overline{n}$. Следовательно, их скалярное произведение равно нулю, т. е.

$$\overline{n} \cdot \overline{M_0M} = 0.$$

Тогда
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (1.1)$$
Получили искомое уравнение.

1.1.2 Общее уравнение плоскости

Раскроем скобки в уравнении (1.1):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0.$$

Обозначим через $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Получаем уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1.2)$$

которое называется **общим уравнением плоскости.**

Частные случаи:

1) $D = 0$. Уравнение $Ax + By + Cz = 0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат;

2) $C = 0$. В этом случае нормальный вектор $\overline{n}(A; B; 0)$ перпендикулярен оси Oz. Поэтому плоскость $Ax + By + D = 0$ параллельна оси Oz;

3) $C = 0$, $D = 0$. С учётом п.1) и п.2) плоскость $Ax + By = 0$ проходит через ось Oz;

4) $B = 0$, $C = 0$. В этом случае нормальный вектор $\bar{n}(A;\ 0;\ 0)$ перпендикулярен плоскости Oyz. Поэтому плоскость $Ax + D = 0$ параллельна оси Oyz;

5) $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$. Плоскость $Ax = 0$ или $x = 0$ определяет координатную плоскость Oyz.

Аналогично рассматриваются всевозможные другие случаи.

1.1.3 Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть даны три точки пространства $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$, не лежащие на одной прямой. Пусть $M(x;\ y;\ z)$ – произвольная точка этой плоскости $\overline{M_1M}\ (x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$, $\overline{M_1M_2}\ (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$, $\overline{M_1M_2}\ (x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1)$ компланарны. Поэтому их смешанное произведение равно нулю:

$$\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_2} = 0.$$

Следовательно, искомое уравнение

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.3}$$

1.1.4 Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть даны две плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Первая плоскость имеет нормальный вектор $\bar{n}_1(A_1;\ B_1;\ C_1)$, вторая плоскость $\bar{n}_2(A_2;\ B_2;\ C_2)$.

Если плоскости параллельны, то векторы $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ коллинеарны, т. е. $\bar{n}_1 = \bar{n}_2\lambda$ для некоторого числа λ. Поэтому

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \text{ – условие параллельности плоскости.}$$

Условие совпадения плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

так как в этом случае умножая второе уравнение на $\lambda = \frac{A_1}{A_2}$, получим первое уравнение.

Если условие параллельности не выполняется, то плоскости пересекаются. В частности, если плоскости перпендикулярны, то перпендикулярны и векторы $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$. Поэтому их скалярное произведение равно 0, т. е. $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$ или

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Это необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей.

1.1.5 Угол между двумя плоскостями

Угол между двумя плоскостями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

– это угол между их нормальными векторами $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$, поэтому

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

1.2 Прямая в пространстве

1.2.1 Векторно-параметрическое уравнение прямой

Определение 1.2. Направляющим вектором прямой называется любой вектор, лежащий на прямой или параллельный ей.

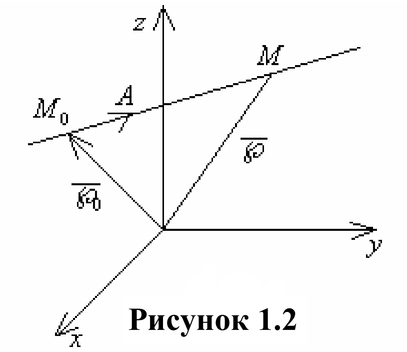

Рисунок 1.2

Составим уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\overline{a} = (a_1; a_2; a_3)$ (рисунок 1.2). Отложим из точки M_0 вектор $\overline{M_0A} = \overline{a}$. Пусть $M(x;\ y;\ z)$ – произвольная точка данной прямой, а $\overline{\wp} = \overline{OM}$ – её радиус-вектор точки M_0. Тогда $\overline{OM_0} + \overline{M_0M} = \overline{OM}$, $\overline{M_0M} = \overline{a}t$, поэтому $\overline{\wp} = \overline{\wp_0} + \overline{a}t$. Это уравнение называется **векторно-параметрическим уравнением прямой.**

1.2.2 Параметрические уравнения прямой

В векторно-параметрическом уравнении прямой $\overline{\wp} = \overline{\wp_0} + \overline{a}t$ перейдёт к координатным соотношениям (x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + $(a_1; a_2; a_3)$t. Отсюда получаем **параметрические уравнения прямой**

$$x = x_0 + a_1t\ ,$$
$$y = y_0 + a_2t\ , \qquad (1.4)$$
$$z = z_0 + a_3t\ .$$

1.2.3 Канонические уравнения прямой

Из уравнений (1.4) выразим t:

$$t = \frac{x - x_0}{a_1},\ \ t = \frac{y - y_0}{a_2},\ \ t = \frac{z - z_0}{a_3},$$

откуда получаем **канонические уравнения прямой**

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}\ . \qquad (1.5)$$

1.2.4 Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть даны две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. В качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\bar{a} = \overline{M_1M_2}$ $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Поскольку прямая проходит через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, то её канонические уравнения в соответствии с (1.5) запишутся в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (1.6)$$

1.2.5 Угол между двумя прямыми

Рассмотрим две прямые с направляющими векторами $\bar{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\bar{в} = (в_1; в_2; в_3)$. Угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами, поэтому

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{в}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{в}|} = \frac{a_1в_1 + a_2в_2 + a_3в_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{в_1^2 + в_2^2 + в_3^2}}. \qquad (1.7)$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$a_1в_1 + a_2в_2 + a_3в_3 = 0.$$

Условие параллельности прямых:

$$\bar{a} = \bar{в}\lambda,$$

т. е.

$$\frac{a_1}{в_1} = \frac{a_2}{в_2} = \frac{a_3}{в_3}. \qquad (1.8)$$

1.2.6 Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть даны две прямые $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}$ и $\frac{x - x_2}{в_1} = \frac{y - y_2}{в_2} = \frac{z - z_2}{в_3}$.

Очевидно, что прямые лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}$, $\bar{в}$ и $\overline{M_1M_2}$ компланарны, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ в_1 & в_2 & в_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.9)$$

Если в (1.9) первые две строки пропорциональны, то прямые параллельны. Если все три строки пропорциональны, то прямые совпадают. Если условие (1.9) выполнено и первые две строки не пропорциональны, то прямые пересекаются.

Если же $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ в_1 & в_2 & в_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0$, то прямые являются скрещивающимися.

1.3 Задачи на прямую и плоскость в пространстве

1.3.1 Прямая, как пересечение двух плоскостей

Пусть заданы две плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Если плоскости не являются параллельными, то нарушается условие

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Пусть, например $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Найдём уравнение прямой, по которой пересекаются плоскости. В качестве направляющего вектора искомой прямой можно взять вектор

$$\bar{a} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

Чтобы найти точку, принадлежащую искомой прямой, фиксируем некоторое значение $z = z_0$ и решая систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z_0 - D_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2z_0 - D_2 \end{cases},$$

получаем значения $x = x_0$, $y = y_0$. Итак, искомая точка $M(x_0; y_0; z_0)$.
Искомое уравнение

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = -\frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

1.3.2 Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть задана прямая $x = x_0 + a_1t$, $y = y_0 + a_2t$, $z = z_0 + a_3t$ и плоскость $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$. Чтобы найти общие точки прямой и плоскости, необходимо решить систему их уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases},$$

откуда $A_1(x_0 + a_1t) + B_1(y_0 + a_2t) + C_1(z_0 + a_3t) + D_1 = 0,$

$$(A_1a_1 + B_1a_2 + C_1a_3)t + (A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) = 0.$$

Если $A_1a_1 + B_1a_2 + C_1a_3 \neq 0$, то система имеет единственное решение

$$t = t_0 = -\frac{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1}{A_1a_1 + B_1a_2 + C_1a_3}.$$

В этом случае прямая и плоскость пересекаются в единственной точке $M_1(x_1; y_1; z_1)$, где $x_1 = x_0 + a_1 t_0$, $y_1 = y_0 + a_2 t_0$, $z_1 = z_0 + a_3 t_0$.

Если $A_1 a_1 + B_1 a_2 + C_1 a_3 = 0$, $A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1 \neq 0$, то прямая и плоскость не имеют общих точек, т. е. параллельны.

Если же $A_1 a_1 + B_1 a_2 + C_1 a_3 = 0$, $A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1 = 0$, то прямая принадлежит плоскости.

1.3.3 Угол между прямой и плоскостью

Найдём угол φ между прямой $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$ и плоскостью $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$.

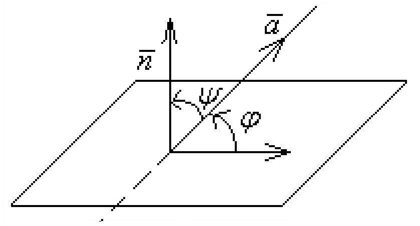

Рисунок 1.3

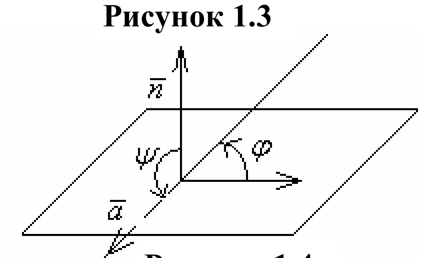

Рисунок 1.4

Поскольку вектор $\bar{n} = (A_1; B_1; C_1)$ образует с направляющим вектором $\bar{a} = (a_1; a_2; a_3)$ угол $\psi = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$ или $\psi = \dfrac{\pi}{2} + \varphi$ (рисунки 1.3 и 1.4), то $\cos\psi = \cos(\dfrac{\pi}{2} - \varphi)$ или $\cos\psi = \cos(\dfrac{\pi}{2} + \varphi)$, откуда $\cos\psi = \sin\varphi$ или $\cos\psi = -\sin\varphi$.

Значит,

$$\sin\varphi = |\cos\psi| = \frac{|A_1 a_1 + B_1 a_2 + C_1 a_3|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

1.3.4 Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до данной плоскости вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

1.4 Поверхности второго порядка

1.4.1 Цилиндры второго порядка

Определение 1.3. Цилиндрической поверхностью называется поверхность, описываемая прямой (**образующей),** движущейся вдоль некоторой линии (**направляющей**) и остающейся параллельной исходному направлению.

Определение 1.4. Цилиндром второго порядка называется цилиндрическая поверхность, направляющей которой является эллипс (окружность), гипербола или парабола.

Рассмотрим цилиндры второго порядка, у которых образующая параллельна оси Oz (рисунки 1.5, 1.6, 1.7).

1) Эллиптический цилиндр

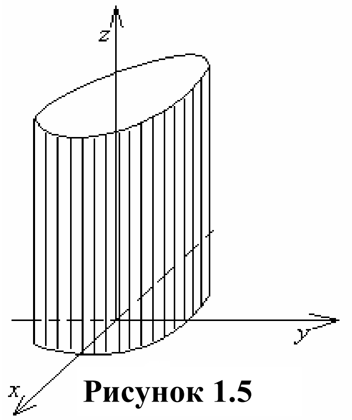

Рисунок 1.5

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$$

В частности эллиптический цилиндр имеет в качестве направляющей окружность. Его уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ или $x^2+y^2=a^2$.

2) Гиперболический цилиндр

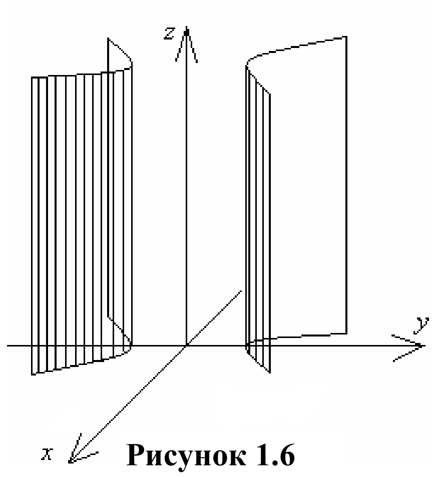

Рисунок 1.6

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$$

3) Параболический цилиндр

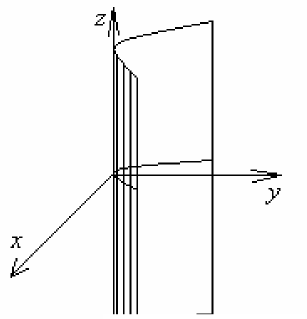

Рисунок 1.7

$$x^2=2py$$

1.4.2 Поверхности вращения второго порядка

Определение 1.5. Поверхностью вращения второго порядка называется поверхность, образованная вращением линии второго порядка вокруг её оси (рисунки 1.8–1.12).

1) Эллипсоид вращения

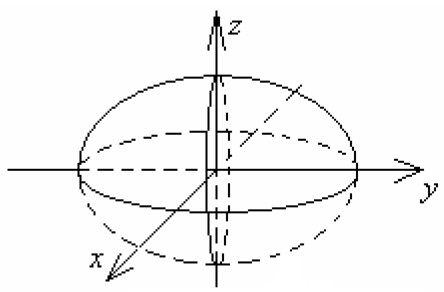

Рисунок 1.8

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

При вращении эллипса $\frac{y^2}{в^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$ вокруг оси Oz получим поверхность, которая называется эллипсоидом вращения. При а = с получаем сферу $x^2+y^2+z^2=a^2$.

2) Однополостный гиперболоид

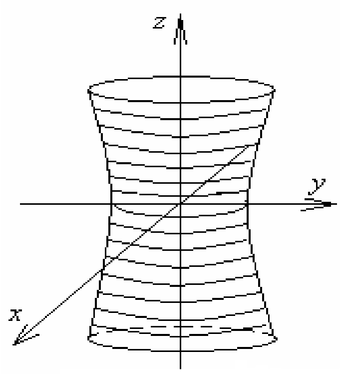

Рисунок 1.9

$$\frac{x^2}{в^2}+\frac{y^2}{в^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Однополостный гиперболоид образуется при вращении гиперболы $\frac{y^2}{в^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$ вокруг оси Oz.

3) Двуполостный гиперболоид

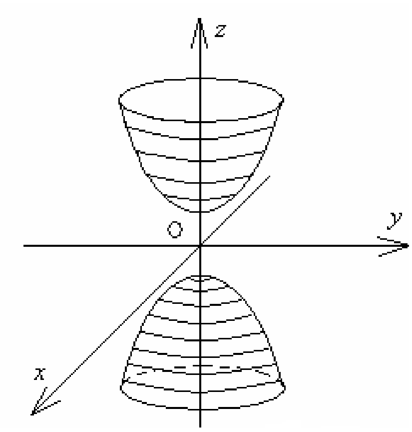

Рисунок 1.10

$$\frac{x^2}{в^2}+\frac{y^2}{в^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Двуполостный гиперболоид образуется при вращении гиперболы $\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{в^2}=1$, $x=0$ вокруг оси Oz.

4) Конус вращения

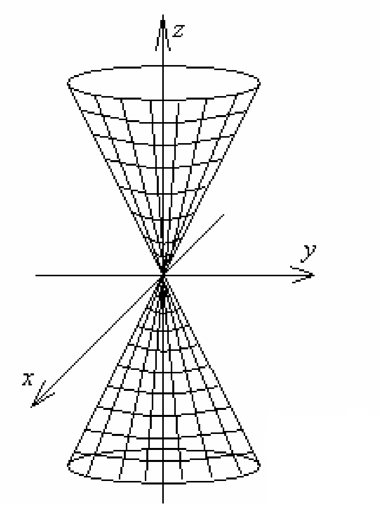

Рисунок 1.11

$$\frac{x^2}{в^2}+\frac{y^2}{в^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Конус вращения образуется при вращении прямых $\frac{y^2}{в^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, $x=0$ вокруг оси Oz.

5) Параболоид вращения

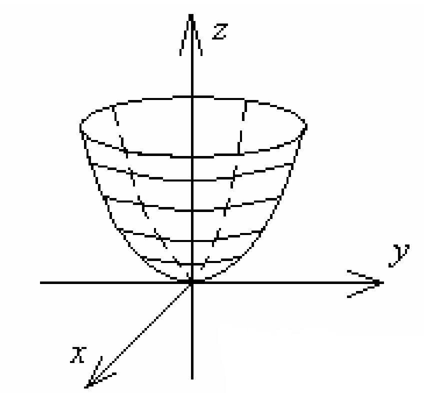

Рисунок 1.12

$x^2+y^2=2pz$ или

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{p}=2z$$

Параболоид вращения получается вращением параболы $y^2=2pz$, $x=0$ вокруг оси Oz

1.4.3 Поверхности второго порядка

1. Трёхосный эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (рисунок 1.13).

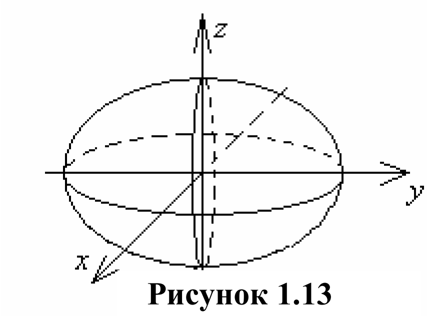

Рисунок 1.13

2. Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

3. Двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

4. Конус второго порядка $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

5. Эллиптический параболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=2z$.

6. Гиперболический параболоид $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=2z$ (рисунок 1.14).

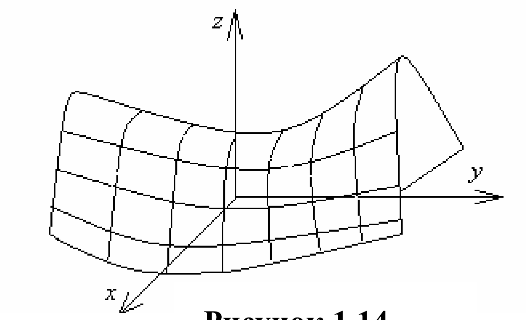

Рисунок 1.14

Вопросы для самоконтроля

1. Как проверить, лежит ли данная точка на поверхности, заданной уравнением?
2. Всегда ли два уравнения с тремя переменными определяют некоторую линию в пространстве? Приведите примеры.
3. Какое множество точек представляет собой уравнение с двумя переменными, если его рассматривать в пространстве?
4. При каких условиях общее уравнение второй степени с тремя переменными определяет сферу? Как найти ее центр и радиус?
5. Как записать уравнение поверхности вращения, полученной при вращении плоской линии f(x, y) = 0 вокруг оси Ox? Приведите примеры.
6. Каков характерный признак, отличающий уравнение плоскости в декартовых координатах от уравнения других поверхностей?
7. Как будет располагаться плоскость относительно осей координат, если в ее уравнении отсутствуют те или иные члены?
8. Как определить направляющий вектор прямой, если она задана общим уравнением?
9. Как определяется угол между двумя плоскостями, между двумя прямыми, между прямой и плоскостью?
10. Каковы условия перпендикулярности и параллельности двух плоскостей, двух прямых, прямой и плоскости?
11. Как найти точку пересечения прямой и плоскости?
12. При каких условиях данная прямая лежит в данной плоскости?
13. Как найти расстояние от точки до плоскости?
14. Напишите виды и уравнения цилиндров второго порядка.
15. Напишите виды и уравнения поверхностей вращения второго порядка.
16. Напишите виды и уравнения поверхностей второго порядка.

2 Линейные пространства

2.1 Линейные пространства и их свойства

Определение 2.1. Рассмотрим непустое множество V и множество действительных чисел R. Определим операцию сложения элементов множества V (её называют **внутренней операцией**): любой упорядоченной паре элементов $x, y \in V$ поставим в соответствие третий элемент $z \in V$, называемый их **суммой;** будем писать в этом случае $z = x + y$. Введём также операцию умножения элементов множества V на действительные числа (эту операцию называют **внешней**): каждому элементу $x \in V$ и действительному числу $\alpha \in R$ поставим в соответствие элемент $z = \alpha x = x\alpha \in V$. Потребуем, чтобы операция сложения элементов множества V и операция умножения элементов V на действительные числа удовлетворяли следующим аксиомам:

1) сложение коммутативно, т. е. $x + y = y + x$ для любых $x, y \in V$;

2) сложение ассоциативно, т. е. $x + (y + z) = (x + y) + z$ для любых $x, y, z \in V$;

3) в V существует **нулевой элемент,** обозначим этот элемент символом O. Это такой элемент, который в сумме с любым элементом $x \in V$ даёт тот же элемент x, т. е. $x + O = O + x = x$;

4) для каждого элемента $x \in V$ существует **противоположный элемент**, т. е. такой элемент, который в сумме с данным даёт нулевой элемент; элемент, противоположный элементу x обозначим $(-x)$, тогда $x + (-x) = 0$ для любого $x \in V$;

5) для любого $x \in V$ и числа $1 \in R$ верно равенство $1 \cdot x = x$;

6) для любых $x, y \in V$, $\alpha, \beta \in R$ верны равенства;

6.1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

6.2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

6.3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

Непустое множество V, в котором определены операции сложения элементов и умножения элементов на действительные числа, удовлетворяющие аксиомам 1–6, называется **действительным линейным пространством** или **действительным векторным пространством.** Элементы такого пространства называют **векторами.**

Примеры линейных пространств

1. Действительным векторным пространством является множество всех векторов трёхмерного пространства, т. е. $\{\overline{a} = (a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in R\}$. Обозначается это пространство R^3. Аналогично можно рассмотреть действительное линейное пространство R^2.

2. ***n*-мерным арифметическим пространством** называется действительное линейное пространство $R^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1, a_2, ..., a_n \in R\}$, в котором сложение элементов и умножение элементов на действительные числа определяется следующим образом:

а) $(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$;

б) $\alpha(a_1, a_2, ..., a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$.

3. Множество всех матриц размерности m×n с действительными элементами образует действительное линейное пространство с операциями сложения матриц и умножения матрицы на число.

4. Множество всех действительных чисел образует действительное линейное пространство.

Из определения действительного линейного пространства нетрудно получить следующие его простейшие свойства.

Свойство 2.1. В линейном пространстве имеется единственный нулевой элемент.

Доказательство. Предположим, что в линейном пространстве V имеются, два нулевых элемента O_1 и O_2. Так как O_1 – нулевой элемент, то $O_1 + O_2 = O_2$. Так как O_2 – нулевой элемент, то $O_1 + O_2 = O_1$. Следовательно, $O_1 = O_1 + O_2 = O_2$.

Свойство 2.2. Для любого элемента $x \in V$ существует единственный противоположный элемент $(-x)$.

Доказательство. Предположим, что x_1 и x_2 – противоположные элементы в V для элемента x. Тогда $x + x_1 = 0$ и $x + x_2 = 0$. Но ввиду этого имеем

$$x_1 = 0 + x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = (x + x_1) + x_2 = 0 + x_2 = x_2.$$

Свойство 2.3. Для любого элемента $x \in V$ произведение $O \cdot x = O_1$, где слева $O \in R$, а справа $O_1 \in V$.

Доказательство. $Ox + O_1 = Ox + (x + (-x)) = (Ox + x) + (-x) = (O + 1)x + (-x) =$ $= x + (-x) = O_1$.

Итак, $Ox + O_1 = O_1$. Так как O_1 – нулевой элемент V, то $Ox = O_1$.

Свойство 2.4. Для любого элемента $x \in V$ $(-1) \cdot x = -x$, где $-x$ – противоположный элемент для x.

Доказательство. $(-1) \cdot x + x = (-1 + 1)x = Ox = O_1$. Следовательно, $(-1)x = -x$.

Свойство 2.5. Для любого числа $\alpha \in R$ произведение $\alpha \cdot O_1 = O_1$, где O_1 – нулевой элемент V.

Доказательство. $\alpha \cdot O_1 = \alpha(x + (-x)) = \alpha(x + (-1)x) = \alpha x + \alpha(-1)x =$ $= \alpha x + (-\alpha)x = (\alpha + (-\alpha))x = Ox = O_1$.

Свойство 2.6. Если $\alpha x = O_1$ и $\alpha \neq 0$, то $x = O_1$.

Доказательство. Пусть $\alpha x = O_1$ и $\alpha \neq 0$. Тогда $\frac{1}{\alpha}(\alpha x) = \frac{1}{\alpha} \cdot O_1 = O_1$. Но $\frac{1}{\alpha}(\alpha x) = (\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha)x = 1x = x$. Следовательно, $x = O_1$.

Свойство 2.7. Если $\alpha x = 0$ и $x \neq 0$, то $\alpha = 0$.

Доказательство. Предположим, что $\alpha \neq 0$. Тогда из свойства 2.6 имеем $x = 0$, что невозможно. Поэтому $\alpha = 0$.

2.2 Линейная зависимость и независимость векторов

Рассмотрим векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейного пространства V.

Вектор $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R$, называется **линейной комбинацией векторов** $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – **коэффициентами этой линейной комбинации.** Система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется **линейно независимой,** если равенство

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \tag{2.1}$$

выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Если же существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ не все равные нулю, при которых выполняется равенство (2.1), то векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются **линейно зависимыми.**

Из определения нетрудно получить следующие свойства:

1) всякая система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима;

2) система из одного нулевого вектора линейно независима;

3) если k из n векторов линейно зависимы, то и вся система из n векторов линейно зависима;

4) если из системы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно независимых векторов отбросить $\wp$ векторов ($\wp < n$), то оставшиеся векторы также будут линейно независимы;

5) если в системе векторов имеются векторы x_i и x_j такие, что $x_i = \alpha x_j$ для $\alpha \in R$, то вся система векторов линейно зависима.

В частности, из свойства 2.4 следует, что в линейном пространстве R^3 любая система векторов, содержащая коллинеарные векторы, будет линейно зависимой.

Теорема 2.1. Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ действительного линейного пространства линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией всех остальных.

Доказательство. Пусть векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно зависимы. Тогда существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ не все равные нулю такие, что

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \tag{2.2}$$

Пусть, например, $\alpha_k \neq 0$.

Тогда $\alpha_k x_k = -\alpha_1 x_1 - \ldots - \alpha_{k-1} x_{k-1} - \alpha_{k+1} x_{k+1} - \ldots - \alpha_n x_n$ и

$$x_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} x_1 - \ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} x_{k-1} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} x_{k+1} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_k} x_n,$$

т. е. x_k – линейная комбинация всех остальных векторов.

Пусть теперь один их векторов, например x_1, является линейной комбинацией остальных векторов, т. е. $x_1 = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_n x_n$. Тогда $(-1)x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$. Это означает, что векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно зависимы.

2.3 Размерность и базис линейного пространства

Определение 2.2. Число n называется **размерностью линейного пространства V,** если выполняются следующие условия:

1) в V существует n линейно независимых векторов;

2) любая система $n + 1$ векторов из V линейно зависима.

Размерность линейного пространства V обозначают $\dim V = n$, то V называют ***n*-мерным линейным пространством.** Если пространство состоит из одного нулевого элемента, то его размерность считают равной нулю. Итак, размерность линейного пространства – это наибольшее возможное количество линейно независимых элементов в нём.

Базисом n-мерного линейного пространства V называется любая упорядоченная система n линейно независимых векторов этого пространства.

Примеры базисов линейных пространств:

1) базисом действительного пространства R^3 является любая тройка некомпланарных векторов. Базис действительного линейного пространства R^2 – любые два неколлинеарных вектора;

2) базисом n-мерного арифметического пространства R^n является, например, система векторов

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют линейным пространством и каковы его свойства?
2. Приведите примеры линейного пространства.
3. Когда система векторов будет называться линейно независимой (линейно зависимой)?
4. Что называют размерностью линейного пространства?
5. Дайте определение базиса линейного пространства.
6. Приведите примеры базисов линейного пространства.

3 Предел функции

Математический анализ – раздел математики, в котором изучаются функции. Основу математического анализа составляет дифференциальное и интегральное исчисление, теория рядов. Заслуга открытия дифференциального исчисления принадлежит английскому математику и физику Исааку Ньютону (1643–1727) и Готфриду Вильгельму Лейбницу (1646–1716), немецкому математику и философу.

3.1 Понятие функции

3.1.1 Функция одной переменной

Понятие функции – одно из основных понятий современной математики.

Рассмотрим множество X элементов x и множество Y элементов y. Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$, обозначаемый $y = f(x)$, то говорят, что **на множестве X задана функция $y = f(x)$ со значениями во множестве Y.** Элементы $x \in X$ называются **значениями аргумента**, а элементы $y \in Y$ – **значениями функции.** Множество X называется **областью определения функции,** множество всех значений функции – **областью значений этой функции.**

Употребляются следующие обозначения функции: $y = f(x)$, $y = F(x)$, $y = \Phi(x)$, $y = \varphi(x)$ и т. п. Значение, которое функция $y = f(x)$ принимает при $x = a$, обозначается $f(a)$.

К традиционным основным способам задания функции относятся: аналитический, графический и табличный.

Аналитический способ задания функции – это задание функции с помощью формул. Например, $y = 2x$, $y = \lg x$, $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \geq 0, \\ -x^2, \text{ если } x < 0 \end{cases}$.

Функция заданная формулой $y = f(x)$, правая часть которой не содержит y, называется **явной функцией.**

Рассмотрим уравнение $F(x;\ y) = 0$. Предположим, что существует непустое множество X значений x таких, что при каждом $x_0 \in X$ уравнение $F(x_0;\ y) = 0$ имеет действительные решения относительно y. Обозначим одно из них через y_0. Сопоставляя таким образом каждому $x_0 \in X$ элемент y_0, получим функцию $y = y(x)$, определённую на множестве X и такую, что $F(x;\ y(x)) \equiv 0$ для всех $x \in X$. Функция $y = y(x)$, определённая таким образом, называется **функцией, заданной неявно** или **неявной функцией.**

Например, уравнение $3x + 2y - 5 = 0$ неявно задаёт функцию $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$. Уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ задаёт неявно две функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$.

Табличный способ задания функции – это способ задания функции при помощи таблицы. Примерами такого задания функции являются таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов и т. д.

Графический способ задания функции – это способ задания функции при помощи графика. **Графиком функции** $y = f(x)$ называется множество точек $(x; f(x))$ плоскости xOy, где x принадлежит области определения функции. Преимуществом графического способа задания функции является его наглядность.

Если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ – функции своих аргументов, причём область определения функции $y = f(u)$ содержит область значений функции $u = \varphi(x)$, то каждому x из области определения функции φ соответствует такое y, что $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$. Эта функция, определяемая соответствием

$$y = f(\varphi(x))$$

называется **сложной функцией** или **композицией функции** φ и f. Например, если $y = u^2$, $u = \sin x$, то $y = \sin^2 x$ – сложная функция.

Кроме тригонометрических и обратных тригонометрических функций в средней школе изучаются функции: степенная $y = x^a$ (a = const), показательная $y = a^x$ (a = const), логарифмическая $y = \log_a x$ (a = const). Все эти функции называются **основными элементарными функциями. Элементарными функциями** называются функции, которые можно получить из основных элементарных функций с помощью алгебраических действий и образования сложных функций. Например, функции $y = \lg \sin x$, $y = x^2 + \cos x$, $y = 3^{\lg\cos x + \sin x}$ являются элементарными.

3.1.2 Функция нескольких переменных

Рассмотрим арифметическое n-мерное пространство.

$$R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in R\}.$$

Пусть X – подмножество элементов множества R^n и Y – некоторое множество элементов y. Если каждому элементу $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то говорят **на множестве X задана функция $y = f(x_1, \ldots x_n)$ со значениями в множестве Y.** Такая функция называется **функцией n переменных** $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

В частности, при $n = 2$ имеем функцию двух аргументов $y = f(x_1, x_2)$ или $z = f(x; y)$. При $n = 3$ получаем функцию трёх переменных $y = f(x_1, x_2, x_3)$ или $u = f(x; y; z)$.

3.2 Предел функции

3.2.1 Предел функции при стремлении аргумента к константе

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определённую в некотором интервале, содержащем точку $x = a$.

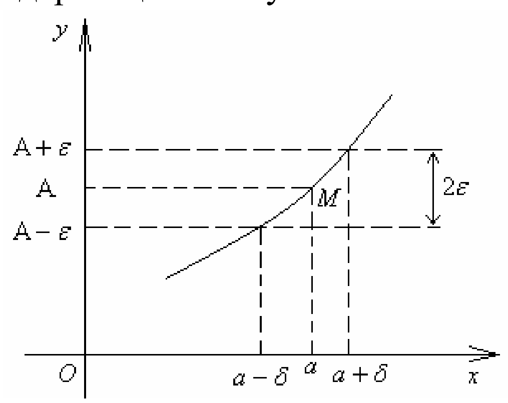

Рисунок 3.1

Определение 3.1. Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ **при x, стремящемся к a (или в точке a),** если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \delta, \tag{3.1}$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Обозначения предела функции $f(x)$ при x, стремящемся к a: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$; $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Выясним геометрический смысл этого определения, воспользовавшись графиком функции $y = f(x)$ (рисунок 3.1). Неравенство (3.1) означает, что x отстоит от точки a не далее, чем на δ, т. е. принадлежит интервалу $(a - \delta;\ a + \delta)$. Неравенство (3.2) означает, что значения функции $y = a(x)$ не выходят из интервала $(A - \varepsilon;\ A + \varepsilon)$ оси Oy. Следовательно, точки M графика функции $y = f(x)$ должны находиться в полоске шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$, $y = A + \varepsilon$ для всех значений x, удалённых от точки a не далее, чем на δ.

Пример 3.1. Используя определение предела функции, доказать, что

$$\lim_{x\to a} (3x - 2) = 1.$$

Решение. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Задача состоит в нахождении числа $\delta > 0$ такого, что из неравенства $|x - 1| < \delta$ следовало бы неравенство $|f(x) - 1| = |(3x - 2)| < \varepsilon$. Из последнего неравенства имеем $|3x - 3| < \varepsilon$, т. е. $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Следовательно, если взять $\delta \le \frac{\varepsilon}{3}$, то для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - 1| < \delta$, будет выполнятся неравенство $|(3x - 2)| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x \to a} (3x - 2) = 1$.

Пример 3.2. Используя определение предела функции, доказать, что $\lim\limits_{x \to a} (x \cdot \sin\frac{1}{x}) = 0$.

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$. Необходимо найти такое число $\delta > 0$, при котором из неравенства $|x - 0| < \delta$ следовало бы неравенство $|x \cdot \sin\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$. Преобразуем последнее неравенство, учитывая, что $|\sin\frac{1}{x}| \le 1$ при $x \ne 0$.

$$| x \cdot \sin\frac{1}{x} | = |x| \cdot |\sin\frac{1}{x}| \le |x| < \varepsilon.$$

Следовательно, взяв $\delta \le \varepsilon$, из неравенства $|x - 0| < \delta$ будет вытекать неравенство $| x \cdot \sin\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to a} (x\sin\frac{1}{x}) = 0$.

3.2.2 Односторонние пределы функции

Определение 3.2. Число A называется **правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке a,** если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < a + \delta$ $(a - \delta < x < a)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$ ($\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$).

Связь между односторонними пределами и пределом функции устанавливает следующая теорема.

Теорема 3.1. Функция $y = f(x)$ имеет в точке a предел тогда и только тогда, когда в этой точке существует как левый, так и правый предел и они равны. В этом случае предел функции равен односторонним пределам.

Доказательство.

1. Пусть $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$. Тогда по определению односторонних пределов, для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < a + \delta_1$, $a - \delta_2 < x < a$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Возьмём $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для всех x, удовлетворяющих неравенствам $a - \delta < x < a + \delta$ (или $0 < |x - a| < \delta$) выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

2. Пусть теперь $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$. Тогда по определению, для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Следовательно, для $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам

$a < x < a + \delta$, (или $a - \delta < x < a$), выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Это означает, что существуют односторонние пределы $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$, причём оба они равны числу A.

Пример 3.3. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ при } x \le 0, \\ x+1, \text{ при } x > 0 \end{cases}$$ не имеет предела в точке $x = 0$.

Решение. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой.

При $x \le 0$ функция $f(x) = x^2$. Пусть $\varepsilon > 0$. Необходимо найти такое $\delta > 0$, что как только $-\delta < x < 0$, то $|f(x)| = |x^2| < \varepsilon$. Таким δ будет $\sqrt{\varepsilon}$. Так как необходимое δ существует, то $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0$.

При $x > 0$ функция $f(x) = x + 1$. Покажем, что $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдём $\delta > 0$ такое, что как только $0 < x < \delta$, будет выполняться неравенство $|x + 1 - x| < \varepsilon$. Действительно, взяв $\delta = \varepsilon$, получим требуемое. Следовательно, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$.

Так как $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) \ne \lim\limits_{x \to 0+} f(x)$, то по теореме 3.1 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ не существует.

3.2.3 Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности

Определение 3.3. Число A называется **предел**ом **функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$**, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует положительное δ такое, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $|x| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Введём также понятие предела функции при стремлении x к $+\infty$ или $-\infty$.

Определение 3.4. Число A называется **пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$)**, если для любого положительного числа ε существует число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $x > \delta$ ($x < -\delta$) выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначается: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ ($\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$).

Пример 3.4. Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x+1}{3x+9} = \dfrac{5}{3}$.

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$. Необходимо найти такое $\delta > 0$, что из неравенства $x > \delta$ следовало бы неравенство

$$\left| \frac{5x+1}{3x+9} - \frac{5}{3} \right| < \varepsilon.$$

Рассмотрим левую часть неравенства

$$\left| \frac{5x+1}{3x+9} - \frac{5}{3} \right| = \left| \frac{5x+1-5(x+3)}{3x+9} \right| = \left| \frac{-14}{3x+9} \right| = \frac{14}{|3x+9|}.$$

Так как $x > 0$, то $\left| \dfrac{14}{3x+9} \right| = \dfrac{14}{3x+9}$. Из неравенства $\dfrac{14}{3x+9} < \varepsilon$ имеем $x > \dfrac{14-9\varepsilon}{3\varepsilon}$.

Итак, если взять $\delta = \dfrac{14-9\varepsilon}{3\varepsilon}$, то для всех $x > \delta$ будет выполняться неравенство $\left|\dfrac{5x+1}{3x+9} - \dfrac{5}{3}\right| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x+1}{3x+9} = \dfrac{5}{3}$.

3.3 Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Определение 3.5. Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to a$ (или при $x \to \infty$), если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ $(\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0)$.

Например, функция $\alpha(x) = (x - 3)^2$ будет бесконечно малой при $x \to 3$, т. к. $\lim\limits_{x\to 3} (x - 3)^2 = 0$; функция $\alpha(x) = \dfrac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x \to \infty$, т. к. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Свойства бесконечно малых функций

1. Если функция $y = y(x)$ имеет предел A при $x \to a$, то $y(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$.

2. Если функция $y(x) = A + \alpha(x)$, где A – число, $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a} y(x) = A$.

3. Сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

4. Произведение двух бесконечно малых функций при $x \to a$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

5. Произведение бесконечно малой функции при $x \to a$ на ограниченную функцию, есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

6. Произведение бесконечно малой функции при $x \to a$ на постоянную функцию, есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

Определение 3.6. Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно большой при** $x \to a$, если для любого положительного числа N можно найти такое число $\delta > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > N$.

Бесконечно большая функция не имеет предела при $x \to a$, но иногда условно говорят, что её предел равен бесконечности и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ или $f(x) \to \infty$ при $x \to a$. Если $f(x)$ стремится к бесконечности, принимая только положительные или только отрицательные значения, то соответственно пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Примером бесконечно большой функции является функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ при $x \to 0$, или функция $g(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ при $x \to 2$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение функции.
2. Перечислите способы задания функции. Приведите примеры.
3. Сформулируйте определение предела в точке.
4. Сформулируйте определение предела функции при стремлении аргумента к бесконечности.
5. Дайте определение односторонних пределов функции. Какая связь между односторонними пределами и пределами функции?
6. Сформулируйте определение бесконечно малой и бесконечно большой функции.
7. Какими свойствами обладают бесконечно малые и бесконечно большие функции?

4 Теоремы о пределах функций

4.1 Основные теоремы о пределе функции

Теорема 4.1. Функция $y = y(x)$ не может иметь более одного предела при $x \to a$.

Доказательство. Предположим противное, пусть функция $y = y(x)$ при $x \to a$ имеет два предела $A_1 \neq A_2$. По свойствам бесконечно малых функций (б.м.ф.) $y(x) = A_1 + \alpha_1(x)$ и $y(x) = A_2 + \alpha_2(x)$, где $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ – б.м.ф. при $x \to a$. Тогда $A_1 + \alpha_1(x) = A_2 + \alpha_2(x)$ или $A_1 - A_2 = \alpha_1(x) - \alpha_2(x)$. Но последнее равенство невозможно, т. к. в левой части стоит постоянная, отличная от нуля, а в правой – бесконечно малая функция.

Теорема 4.2. Если каждая из функций $y = y(x)$, $z = z(x)$ имеет предел при $x \to a$, то сумма, разность, произведение этих функций также имеют пределы, причём

1) $\lim\limits_{x\to a}(y(x) \pm z(x)) = \lim\limits_{x\to a} y(x) \pm \lim\limits_{x\to a} z(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}(y(x) \cdot z(x)) = \lim\limits_{x\to a} y(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} z(x)$,

если кроме того, $\lim\limits_{x\to a} z(x) \neq 0$, то частное $\dfrac{y(x)}{z(x)}$ имеет предел, причём

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{y(x)}{z(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} y(x)}{\lim\limits_{x\to a} z(x)}$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} y(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} z(x) = B$.

Тогда по свойствам б.м.ф. $y(x) = A + \alpha(x)$, $z(x) = B + \beta(x)$, где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – б.м.ф. при $x \to a$. Получаем:

1) $y(x) \pm z(x) = (A \pm B) + (\alpha(x) \pm \beta(x))$. По свойствам б.м.ф. $\alpha(x) \pm \beta(x)$ – б.м.ф., поэтому $\lim\limits_{x\to a}(y(x) \pm z(x)) = A \pm B$, т. е. $\lim\limits_{x\to a}(y(x) \pm z(x)) = \lim\limits_{x\to a} y(x) \pm \lim\limits_{x\to a} z(x)$;

2) $y(x)\cdot z(x) = (A + B + \beta(x) = A\cdot B + \alpha(x)\cdot B + A\cdot\beta(x) + \alpha(x)\cdot\beta(x)$. По свойствам б.м.ф. функция $\alpha(x)\cdot B + A\cdot\beta(x) + \alpha(x)\cdot\beta(x)$ – б.м.ф. при $x \to a$.

Поэтому $\lim\limits_{x\to a}(y(x)\cdot z(x)) = AB = \lim\limits_{x\to a} y(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} z(x)$;

3) Пусть $B \neq 0$. Рассмотрим разность

$$\frac{y(x)}{z(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B} = \frac{AB + B\alpha(x) - AB - A\beta(x)}{(B+\beta(x))B} = (B\alpha(x) - A\beta(x))\cdot\frac{1}{B(B+\beta(x))}.$$

По свойствам б.м.ф. функция $B\alpha(x) - A\beta(x)$ – б.м.ф. при $x \to a$.

Рассмотрим функцию $\wp(x) = \dfrac{1}{B(B+\beta(x))}$.

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to a}\wp(x) = \dfrac{1}{B^2}$. Это означает, что для ε, равного, например, $\dfrac{1}{2B^2}$ найдутся x, расположенные вокруг точки a такие, что $\left|\wp(x) - \dfrac{1}{B^2}\right| < \dfrac{1}{2B^2}$, т. е. $-\dfrac{1}{2B^2} < \wp(x) - \dfrac{1}{B^2} < \dfrac{1}{2B^2}$, $\dfrac{1}{2B^2} < \wp(x) < \dfrac{3}{2B^2}$. Но это означает, что функция $\wp(x)$ ограничена. Тогда по свойствам б.м.ф. произведение

$(B\alpha(x) - A\beta(x))\cdot\dfrac{1}{B(B+\beta(x))}$ – б.м.ф. при $x \to a$.

Обозначим её $\alpha_1(x)$, т. е. $\dfrac{y(x)}{z(x)} - \dfrac{A}{B} = \alpha_1(x)$. Тогда $\dfrac{y(x)}{z(x)} = \dfrac{A}{B} + \alpha_1(x)$. По свойствам б.м.ф. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{y(x)}{z(x)} = \dfrac{A}{B} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} y(x)}{\lim\limits_{x\to a} z(x)}$.

Следствие 4.1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е. если $c = \text{const}$, то $\lim\limits_{x\to a}(c\cdot y(x)) = c\lim\limits_{x\to a} y(x)$.

Следствие 4.2. Если $\lim\limits_{x\to a} y(x) = A$, то для любого натурального числа m $\lim\limits_{x\to a}(y(x))^m = (\lim\limits_{x\to a} y(x))^m = A^m$.

Теорема 4.3. Пусть три функции $u = u(x)$, $v = v(x)$, $y = y(x)$ определены в некотором промежутке, содержащем точку a. Если для любого x из этого промежутка выполняется неравенства $u(x) \le y(x) \le v(x)$ и функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ имеют одинаковые пределы при $x \to a$, то функция $y = y(x)$ имеет тот же предел при $x \to a$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim\limits_{x\to a} v(x) = A$. Т. к. $u(x) \le y(x) \le v(x)$, то $u(x) - A \le y(x) - A \le v(x) - A$.

По определению предела функции $\forall\varepsilon > 0$ существуют $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что из неравенств $0 < |x - a| < \delta_1$ следует $|u(x) - A| < \varepsilon$, а из неравенств $0 < |x - a| < \delta_2$ следует $|v(x) - A| < \varepsilon$. Обозначим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - a| < \delta$ следует $-\varepsilon < u(x) - A < \varepsilon$

и $-\varepsilon < v(x) - A < \varepsilon$. Поэтому из неравенств $u(x) - A \le y(x) - A \le v(x) - A$ следует $-\varepsilon < y(x) - A < \varepsilon$, т. е. $\left| y(x) - A \right| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to a} y(x) = A$.

Теорема 4.4. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором промежутке, содержащем точку a. Если при $x \to a$ функция $y = f(x)$ имеет положительный (отрицательный) предел, то найдётся такой промежуток вокруг точки a, что для всех x из этого промежутка функция положительна (отрицательна).

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Это означает, что $\forall\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < \left| x - a \right| < \delta$, выполняется неравенство $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$, т. е. $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$.

Если $A > 0$, то взяв $\varepsilon = \frac{1}{2}A$ из неравенства $A - \varepsilon < f(x)$, получим $f(x) > A - \varepsilon =$ $= A - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}A > 0$, т. е. $f(x) > 0$ при $-\delta < x - a < \delta$, т. е. при $a - \delta < x < \delta + a$.

Если $A < 0$, то взяв $\varepsilon = -\frac{1}{2}A$, из неравенства $f(x) < A + \varepsilon$ получим $f(x) < A + \varepsilon = = A - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}A < 0$, т. е. $f(x) < 0$ при $a - \delta < x < \delta + a$.

Эта теорема называется **теоремой о сохранении знака функции, имеющей предел.**

Теорема 4.5. Если функции $u(x)$, $v(x)$ определены в некотором промежутке, содержащем точку a, и для всех x из этого промежутка, кроме $x = a$, выполняется неравенство $u(x) < v(x)$, причём функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют пределы при $x \to a$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} u(x) \le \lim\limits_{x\to a} v(x)$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} u(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} v(x) = B$. Положим, что $A > B$. По теореме 4.2 $\lim\limits_{x\to a}(u(x) - v(x)) = A - B > 0$. По теореме 4.4 найдётся промежуток вокруг точки a такой, что для всех x из этого промежутка $u(x) - v(x) > 0$, т. е. $u(x) > v(x)$, что противоречит условию.

Следовательно, предположение неверно и $A \le B$, т. е. $\lim\limits_{x\to a} u(x) \le \lim\limits_{x\to a} v(x)$.

4.2 Замечательные пределы

Определение 4.1. Будем говорить, что отношение двух функций $f(x)/g(x)$ есть **неопределённость вида** $\frac{0}{0}$ (или $\frac{\infty}{\infty}$) при $x \to a$, если числитель и знаменатель дроби – бесконечно малые функции (бесконечно большие функции) при $x \to a$. В этом случае о пределе отношения $f(x)/g(x)$ при $x \to a$ ничего определённого сказать нельзя: он может быть равен нулю, бесконечности, числу, отличному от нуля, а может и вовсе не существовать. **Раскрыть эти неопределённости** – значит вычислить предел отношения $f(x)/g(x)$, если он существует, или доказать, что он не существует. Для раскрытия неопределённостей применяют различные методы.

Метод 1. Сокращение общего множителя

Пример 4.1. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+4}{x^2-2x+4}=\dfrac{1}{6}$.

Пример 4.2. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{16-x^2}{\sqrt{5+x}-3}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(16-x^2)(\sqrt{5+x}+3)}{(\sqrt{5+x}-3)(\sqrt{5+x}+3)}=$

$=\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(4-x)(4+x)(\sqrt{5+x}+3)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}(-4-x)(\sqrt{5+x}+3)=-48$.

Метод 2. Деление на степень *x*.

Пример 4.3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{3}{x^2}}{2\dfrac{x^2}{x^2}+3\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{4}{x^2}}=$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2})}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$.

Пример 4.4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+3}{2x^2+3x+4}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{3}{x^2}}{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}=0$.

Пример 4.5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+5}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{5}{x^3}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}}=\infty$.

Метод 3. Для раскрытия неопределённости вида $\dfrac{0}{0}$ иногда удобно использовать <u>первый замечательный предел</u> $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$.

Пример 4.6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)}\cdot\sin\dfrac{x}{2}=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{x}{2}=1\cdot 0=0$.

Пример 4.7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\sin 4x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\sin 4x}\cdot\dfrac{5x}{4x}=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\sin 4x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{4}=1\cdot\dfrac{5}{4}=\dfrac{5}{4}$.

С помощью тождественных преобразований можно свести неопределённости других видов, таких как $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 1^∞; 0^0; ∞^0 к виду $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Метод 4. Часто для раскрытия неопределённости вида 1^{∞} **используют <u>второй замечательный предел</u>** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

Пример 4.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{3}=e^{3}.$

Пример 4.9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x)=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\log_a e.$

В частности, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему о единственности предела.
2. Сформулируйте теорему о пределе алгебраической суммы, произведения и частного.
3. В чем заключается теорема о сохранении знака функции, имеющей предел?
4. Сформулируйте теоремы для ограниченных функций.
5. Сформулируйте первый замечательный предел.
6. Сформулируйте второй замечательный предел.

5 Непрерывность функций

5.1 Понятие непрерывной функции

Понятие непрерывности функции является одним из основных понятий математического анализа.

Определение 5.1. Функция $y=f(x)$, определённая на интервале $(a;b)$, называется **непрерывной в точке** $x_0(a;b)$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Пример 5.1. Доказать непрерывность функции $f(x)=2x^2+2x+1$ в точке $x_0=1$.

Решение. Находим:

1) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+2x+1)=2\lim\limits_{x\to 1}x^2+2\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}1=2\cdot 1+2\cdot 1+1=5.$

2) $f(1)=2\cdot 1^2+2\cdot 1+1=5.$

Так как $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$, то по определению функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0=1$.

Определение 5.2. Пусть x_0, $x_0\in(a;b)$. Разность $\Delta x=x-x_0$ называется **приращением аргумента в точке** x_0, а разность $\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ – **приращением функции в точке** x_0.

Теорема 5.1. Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in (a; b)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Доказательство. 1 Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in (a; b)$. Это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Положим $x = x_0 + \Delta x$. Получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0),$$

откуда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0) = 0, \qquad \lim\limits_{\Delta x \to 0} ((x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0,$

т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

2 Пусть теперь $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} ((x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$, откуда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0) = 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$. Это означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Теорема 5.2. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, то непрерывны в этой точке их сумма $f(x) + \varphi(x)$, разность $f(x) - \varphi(x)$, произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$, а также частное $f(x)/\varphi(x)$ при условии, что $\varphi(x_0) \neq 0$.

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из определения непрерывности и свойств пределов функций.

Например, непрерывными являются многие элементарные функции:

1) целая рациональная функция $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ непрерывна при всех $x \in R$;

2) дробно-рациональная функция $R(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$ непрерывна при всех x, для которых знаменатель не обращается в нуль;

3) тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывны во всех точках области определения.

Теорема 5.3. Пусть функция $z = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(z)$ непрерывна в точке $z_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Эта теорема позволяет сделать вывод о непрерывности функций, которые являются композициями непрерывных функций.

Пример 5.2. Доказать, что функция $y = \sin x^2$ непрерывна в точке $x_0 = 0$.

Решение. Функция $z = x^2$ непрерывна в точке $x_0 = 0$ как целая рациональная функция. Функция $y = \sin z$ непрерывна в точке $z_0 = x_0^2 = 0$, то по теореме 5.3 сложная функция $y = \sin z = \sin x^2$ непрерывна в точке $x_0 = 0$.

Определение 5.3. Функция называется **непрерывной на интервале,** если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Если функция определена при $x = a$ и при этом $\lim\limits_{x \to +a} f(x) = f(a)$, то говорят, что $f(x)$ в точке a **непрерывна справа.** Аналогично, если $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = f(b)$, то говорят, что $f(x)$ в точке b **непрерывна слева.** Функция называется **непрерывной на** $[a; b]$**,** если она непрерывна в каждой его точке (в точке a – непрерывна справа, в точке b – непрерывна слева).

Функции, непрерывные на отрезке, обладают рядом важных свойств, которые выражаются следующими теоремами.

Теорема 5.4. (первая теорема Больцано-Коши).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и на концах отрезка имеет значения разных знаков. Тогда существует точка $c \in [a;b]$, в которой $f(c) = 0$.

Теорема 5.5. (вторая теорема Больцано-Коши).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, причём $f(a) = A$, $f(b) = B$. Пусть C – любое число, заключённое между A и B. Тогда на отрезке $[a;b]$ найдётся точка c такая, что $f(c) = C$.

Теорема 5.6. (первая теорема Вейерштрасса).

Если функция f(x) определена и непрерывна на $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 5.7. (вторая теорема Вейерштрасса).

Если функция f(x) непрерывна на $[a;b]$, то она достигает на этом отрезке своего наименьшего значения и своего наибольшего значения, т. е. существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a;b]$, что для всех $x \in [a;b]$ $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$.

5.2 Точки разрыва функции и их классификация

Определение 5.4. Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются **точками разрыва этой функции.** Если $x = x_0$ – точка разрыва функции $y = f(x)$, то в ней выполняется по крайней мере одно из условий непрерывности функции, а именно:

1) функция определена в окрестности точки x_0, но не определена в самой точке x_0. Например, функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ не определена в точке $x_0 = 2$;

2) функция определена в точке x_0 и её окрестности, но не существует предела $f(x)$ при $x \to x_0$. Например, функция $f(x) = \begin{cases} x-1, \text{ если } x < 2; \\ 2-x, \text{ если } x \ge 2 \end{cases}$ определена в точке $x_0 = 2$, однако в точке $x_0 = 2$ имеет разрыв т. к. эта функция не имеет предела при $x \to 2$: $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = 1$, а $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = 0$;

3) функция определена в точке x_0 и её окрестности, существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но этот предел не равен значению функции в точке x_0: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ne f(x_0)$.

Например, функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x \ne 0 \\ 2, \quad \text{ если } x = 0. \end{cases}$

Здесь $x_0 = 0$ – точка разрыва: $\lim\limits_{x\to x0} f(x) = 1$, а $f(x_0) = 2$.

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода.

Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва первого рода** функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A_2$. При этом:

а) если $A_1 = A_2$, то x_0 – точка устранённого разрыва;

б) если $A_1 \neq A_2$, то x_0 – точка конечного разрыва.

Величина $|A_1 - A_2|$ называется скачком функции в точке разрыва первого рода.

Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

Пример 5.3. $y = \dfrac{1}{x-2}$, $x_0 = 2$ – точка разрыва второго рода.

Пример 5.4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{если } x \neq 0 \\ 2, \quad \text{если } x = 0. \end{cases}$ $x_0 = 0$ – точка разрыва первого рода, скачок функции равен 1.

Пример 5.5. $f(x) = \begin{cases} x-1, \text{если } x < 2; \\ 2-x, \text{если } x \geq 2 \end{cases}$ $x_0 = 0$ является точкой устранимого разрыва первого рода.

Положив $g(x) = 1$ при $x = 0$, разрыв устранится, функция станет непрерывной.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение непрерывной функции.
2. Какие арифметические действия не нарушает свойство непрерывности?
3. Какими свойствами обладает непрерывная на отрезке функция?
4. Дайте определение точек разрыва.
5. Дайте определение точек разрыва первого и второго рода.

6 Производная и дифференциал функции

6.1 Производная функции

Определение 6.1. Пусть на некотором промежутке $(a;b)$ определена функция $y = f(x)$. Возьмём произвольную точку $x_0 \in (a;b)$ и придадим аргументу x в точке x_0 произвольное приращение Δx такое, что точка $x_0 + \Delta x \in (a;b)$. **Производной функции** $y = f(x)$ **в точке** x_0 называется предел при $\Delta x \to 0$ отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если этот предел существует. Обозначается предел функции $f(x)$ в точке x_0 через $f'(x_0)$, т. е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную в каждой точке $x \in (a;b)$, то производную $f'(x)$ можно рассматривать как функцию от x, определённую на $(a;b)$.

Если для некоторого значения x_0 выполняется условие

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \ (\text{или} \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty),$$

то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет **бесконечную производную** знака плюс (или знака минус).

Пример 6.1. Найти производную функции $f(x) = x^2$ в точке $x = x_0$.

Решение. Придавая аргументу x в точке x_0 приращение Δx, находим

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$

Теперь находим $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$

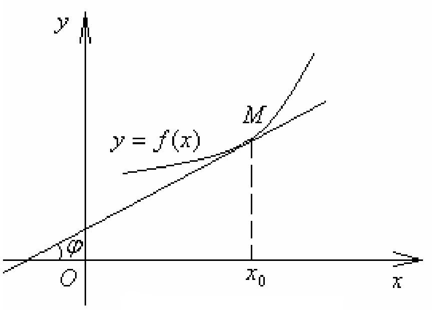

Рисунок 6.1

Из школьного курса математики известно: **геометрический смысл производной** состоит в том, что производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$, т. е.

$f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi$ (рисунок 6.1).

Пример 6.2. Составить уравнение касательной, проведённой из точки $M(1; -3)$ к параболе $f(x) = x^2$.

Решение. Пусть касательная в точке $(x_0; f(x_0))$ к параболе $f(x) = x^2$ имеет уравнение $y = kx + b$. Тогда по геометрическому смыслу касательной $k = f'(x_0) = 2x_0$. Так как касательная проходит через точки $(1; -3)$ и $(x_0; x_0^2)$, то имеем систему:

$$\begin{cases} -3 = 2x_0 + b \\ x_0^2 = 2x_0 \cdot x_0 + b, \end{cases}$$

откуда, вычитая из второго уравнения первое, получим

$$x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0$$

$$x_0 = -1 \ \text{или} \ x_0 = 3.$$

Если $x_0 = -1$, то $b = -1$ и уравнение касательной имеет вид $y = -2x - 1$.

Если $x_0 = 3$, то $b = -9$ и уравнение касательной – $y = 6x - 9$.

6.1.1 Таблица производных

Таким образом можно составить таблицу производных простейших элементарных функций:

1. $(C)' = 0$, где $C = \text{const}$;

2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$. В частности $x' = 1$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(x^2)' = 2x$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. $(a^x)' = a^x \ell na$. В частности, $(e^x)' = e^x$.

4. $(\ell og_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \ell og_a e = \frac{1}{x \ell na}$. В частности, $(\ell nx)' = \frac{1}{x}$.

5. $(\sin x)' = \cos x$.

6. $(\cos x)' = -\sin x$.

7. $(\text{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

8. $(\text{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. $(\text{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

12. $(\text{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

6.2 Дифференциал функции

Определение 6.2. Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой в точке** x_0, если она имеет в этой точке конечную производную. Если функция дифференцируема в каждой точке интервала $(a;b)$, то она называется **дифференцируемой на** $(a;b)$.

В связи с этим определением операцию нахождения производной часто называют **дифференцированием.**

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то справедливы следующие утверждения:

1) $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где Δx – приращение аргумента, Δy – приращение функции, A – число, не зависящее от Δx, $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$. Очевидно, что $A = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$;

2) функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Однако, не всякая непрерывная функция является дифференцируемой. Например, функция $y = \sqrt[3]{x}$ непрерывна в точке $x_0 = 0$, т. к. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[3]{x} = 0 = f(x_0)$.

Однако производная $y' = (\sqrt[3]{x})' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ в точке $x_0 = 0$ не существует, т. е. функция в точке $x_0 = 0$ не дифференцируема.

Определение 6.3. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. **Дифференциалом функции** $f(x)$ в точке x_0 называется часть приращения функции

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

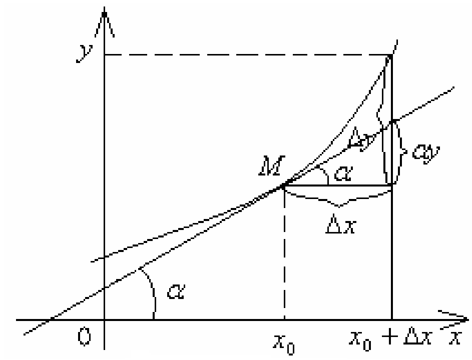

Рисунок 6.2

Дифференциалом независимой переменной x называется приращение этой переменной, т. е. $dx = \Delta x$. Таким образом, геометрический смысл дифференциала функции $y = f(x)$ состоит в том, что дифференциал dy в точке x_0 равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в точке $M(x_0; f(x_0))$ (рисунок 6.2).

Во многих задачах приращение функции в данной точке можно приближённо заменить дифференциалом функции в этой точке: $\Delta y \approx dy$.

Пример 6.3. Используя дифференциал функции, вычислить приближённо $\sqrt{1{,}0003}$.

Решение. Пусть функция $y = \sqrt{x}$. Положим $x_0 = 1$ и приращение аргумента $\Delta x = 0{,}0003$. Тогда $\Delta y = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} \approx dy = y'(x_0)\Delta x = (\sqrt{x})'\big|_{x=x_0} \Delta x =$
$= \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}\Delta x = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} \cdot 0{,}0003 = 0{,}00015$. Теперь $\sqrt{1{,}0003} \approx 1 + 0{,}00015 = 1{,}00015$.

Правила дифференцирования функций сформулируем в следующей теореме.

Теорема 6.1. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии, что $v(x_0) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке, причём имеют место следующие формулы:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Доказательство. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x_0:

1) $(u \pm v)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{(u(x_0 + \Delta x) \pm v(x_0 + \Delta x)) - (u(x_0) \pm v(x_0))}{\Delta x}\right) =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \pm \frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}\right) \pm$$

$$\pm \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x}\right) = u' \pm v'.$$

2) $(u \cdot v)' = \ell im_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{u(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0 + \Delta x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{\Delta x} \right) =$

$$= \ell im_{\Delta x \to 0} \left(\frac{(u(x_0) + \Delta u) \cdot (v(x_0) + \Delta v) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{\Delta x} \right) = \ell im_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u \cdot v(x_0) + \Delta v \cdot u(x_0) + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} \right) =$$

$$= \ell im_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x_0) \right) + \ell im_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u(x_0) \right) + \ell im_{\Delta x \to 0} \left(\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \left(\ell im_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \cdot v(x_0) +$$

$$+ u(x_0) \cdot \ell im_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \ell im_{\Delta x \to 0} \Delta u \cdot \ell im_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \cdot v + u \cdot v' + 0 \cdot v' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

3) Пусть $v(x_0) \neq 0$.

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \ell im_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)} - \dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}}{\Delta x} = \ell im_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v(x_0 + \Delta x)}{\Delta x \cdot v(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0)} \right) =$$

$$= \ell im_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x_0) + \Delta u) \cdot v(x_0) - u(x_0)(v(x_0) + \Delta v)}{\Delta x (v(x_0) + \Delta v) \cdot v(x_0)} = \ell im_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot \Delta v)}{\Delta x (v^2(x_0) + \Delta v \cdot v(x_0))} =$$

$$= \ell im_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x_0) + \Delta v \cdot v(x_0)} = \frac{\left(\ell im_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \right) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot \ell im_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{\ell im_{\Delta x \to 0} (v^2(x_0) + \Delta v \cdot v(x_0))} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

6.3 Правило дифференцирования сложной функции

Следующая теорема даёт правило дифференцирования сложной функции.

Теорема 6.2. Если функция $x = \varphi(t)$ имеет производную в точке t_0, а функция $y = f(x)$ имеет производную в соответствующей точке $x_0 = \varphi(t_0)$, то сложная функция $f(\varphi(t))$ имеет производную в точке t_0, причём имеет место следующая формула

$$y'(t_0) = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0).$$

Пример 6.4. Вычислить y', если $y = e^{arctgx}$.

Решение. Данную функцию можно представить в виде $y = e^u$, где $u = arctg\, x$. Тогда по теореме 6.2 $y'(x) = y'(u) \cdot u'(x) = (e^u)' \cdot (arctg\, x)' = = e^u \cdot \dfrac{1}{1 + x^2} = e^{arctgx} \cdot \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Замечание 6.1. В теореме 6.2 мы рассмотрели сложную функцию, где y зависит от переменной t через одну промежуточную переменную x. Возможна и более сложная зависимость – с несколькими промежуточными переменными. При этом правило дифференцирования остаётся прежним.

Пример 6.5. Вычислить производную функцию $y = \mathrm{tg}^2(x^2+1)$.

Решение. Данную функцию можно представить в виде у = u^2, $u = \mathrm{tg} v$, $v = x^2+1$. Тогда

$$y'(x) = y'(u)\cdot u'(v)\cdot v'(x) = (u^2)'\cdot(\text{tg}\,v)'\cdot(x^2+1)' =$$
$$= 2u\cdot\frac{1}{\cos^2 v}\cdot((x^2)'+1') = 2\cdot\text{tg}\,(x^2+1)\cdot\frac{1}{\cos^2(x^2+1)}\cdot 2 = \frac{4x\cdot tg(x^2+1)}{\cos^2(x^2+1)}.$$

Мы уже отмечали, что производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ сама является функцией аргумента x. Следовательно, по отношению к ней снова можно ставить вопрос о существовании и нахождении производной.

6.4 Производная *n*-го порядка

Определение 6.4. Назовём $f'(x)$ **производной первого порядка** функции $y = f(x)$, дифференцируемой на некотором промежутке $(a;b)$. Производная от $f'(x)$ называется **производной второго порядка** функции $y = f(x)$ и обозначается $f''(x)$. Производная от $f''(x)$ называется **производной третьего порядка**, обозначается $f'''(x)$. Таким образом определяется производная n-го порядка для любого натурального n. Производные, начиная со второй, называются **производными высшего порядка** и обозначаются: y'', y''', $y^{(4)}$, $y^{(5)}$,…, $y^{(n)}$,… . Итак, по определению

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})',\ n = 2, 3, \ldots .$$

Пример 6.6. Вычислить производную третьего порядка функции $y = xe^{-x}$.

Решение. 1) $y' = (x\cdot e^{-x})' = x'\cdot e^{-x} + x(e^{-x})' = e^{-x} - x\cdot e^{-x}$;

2) $y'' = (y')' = (e^{-x} - x\cdot e^{-x})' = (e^{-x})' - (x\cdot e^{-x})' = -e^{-x} - (e^{-x} - x\cdot e^{-x}) =$
$= -2e^{-x} + x\cdot e^{-x}$;

3) $y''' = (y'')' = (-2e^{-x} + x\cdot e^{-x})' = (-2e^{-x})' + (x\cdot e^{-x})' = 2e^{-x} + (-e^{x}\cdot x + e^{-x}) =$
$= 3e^{-x} - e^{-x}\cdot x = e^{-x}(3-x)$.

Определение 6.5. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке некоторого промежутка. Дифференциал $dy = f'(x)dx$ называется **дифференциалом первого порядка** функции $y = f(x)$. **Дифференциалы высших порядков** (второго, третьего и т. д.) определяются следующей формулой

$$d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n,\ n = 2, 3, \ldots .$$

Пример 6.7. Вычислить дифференциал d^2y, где $y = x^4 - 3x^2 + 4$.

Решение. 1) $dy = (x^4 - 3x^2 + 4)'dx = (4x^3 - 6x)dx$;
2) $d^2y = (4x^3 - 6x)'(dx) = (12x^2 - 6)(dx)^2$.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение производной.
2. Каков геометрический смысл производной?
3. Какая функция называется дифференцированной в точке?
4. Что называют дифференциалом функции?
5. Сформулируйте основные правила дифференцирования функции.
6. По какому правилу находится дифференцирование сложной функции?
7. Как находятся производные и дифференциал высших порядков?

7. Основные теоремы дифференциального исчисления

7.1 Основные теоремы дифференциального исчисления

7.1.1 Теорема Ферма

Теорема 7.1. Пусть функция $f(x)$ определена $(a;b)$ и в некоторой точке x_0 этого интервала имеет наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если в точке x_0 существует производная, то она равна нулю, т. е. $f'(x) = 0$.

Доказательство. Пусть для определённости в точке x_0 функция $f(x)$ имеет наибольшее значение, т. е. для любого $x \in (a;b)$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$. Это означает, что $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$ для любого приращения аргумента Δx. Возможны два случая:

1) $\Delta x > 0$. Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0;$$

2) $\Delta x < 0$. Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0.$$

По условию, f'(x) существует, поэтому существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Но тогда существуют односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{x \to x_0-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, причём

$$0 \leq \lim_{x \to x_0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0.$$

Всё это возможно только при $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, т. е. при $f'(x) = 0$.

Аналогично рассматривается случай, когда в точке x_0 функция $f(x)$ имеет наименьшее значение.

7.1.2 Теорема Ролля

Теорема 7.2. Пусть на $[a;b]$ определена функция $f(x)$, причём: 1) $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$; 2) $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$; 3) $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $c \in (a;b)$, в которой $f'(c) = 0$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то по второй теореме Вейерштрасса она имеет на этом отрезке максимальное значение M и минимальное значение m, т. е. существуют такие точки x_1, $x_2 \in [a;b]$, в которых $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ и выполняются неравенства

$$m \leq f(x) \leq M \text{ для всех } x \in [a;b].$$

Возможны два случая:

1) $M = m$. Тогда $f(x) = \text{const} = M = m$. В этом случае для любого $x \in (a;b)$ имеем $f'(x) = 0$. Теорема верна;

2) $m < M$. Так как $f(a) = f(b)$, то хотя бы одно значение m или M достигается на $(a;b)$, т. е. существует $c \in (a;b)$ такая, что $f(c) = m$ или $f(c) = M$. Поскольку $f(x)$ дифференцируема в точке c, то по теореме Ферма $f'(c) = 0$.

7.1.3 Теорема Лагранжа

Теорема 7.3. Пусть на отрезке $[a;b]$ определена функция $f(x)$, причём 1) $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$; 2) $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$. Тогда существует точка $c \in (a;b)$ такая, что справедлива формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Доказательство. Введём в рассмотрение на $[a;b]$ вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a).$$

Функция $F(x)$ удовлетворяют всем трём условиям теоремы Ролля:

1) $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$ как разность двух непрерывных функций $f(x)$ и линейной функции

$$f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a);$$

2) $F(x)$ дифференцируема на $(a;b)$. Действительно, $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ по условию, поэтому производная $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ существует на $(a;b)$;

3) $F(a) = 0$; $F(b) = 0$, т. е. $F(a) = F(b)$.

Тогда по теореме Ролля существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $F'(c) = 0$, т. е.

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Равенство $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ называется **формулой Лагранжа** или **формулой конечных приращений.**

7.1.4 Теорема Коши

Теорема 7.4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a;b]$ и дифференцируемы на $(a;b)$. Пусть, кроме того, $g'(x) \neq 0$. Тогда на $(a;b)$ существует точка c такая, что справедлива формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (7.1)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что $g(b) \neq g(a)$, т. е. формула (7.1) имеет смысл. Если предположить, что $g(b) = g(a)$, то по теореме Ролля для функции $g(x)$ на $(a;b)$ найдётся точка h такая, что $g'(h) = 0$. Это противоречит условию $g'(x) \neq 0$ на $(a;b)$.

Рассмотрим на $[a;b]$ вспомогательную функцию

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot g'(x), \quad \text{то} \quad f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot g'(c) = 0,$$

откуда, учитывая $g'(c) \neq 0$, получим

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Формула (7.1) называется **формулой Коши** или **обобщённой формулой конечных приращений.**

Замечание 7.1. Если в формуле Коши взять функцию $g(x) = x$, то получим формулу Лагранжа.

Снова вернёмся к вопросу раскрытия неопределённостей. Познакомимся с простым и эффективным методом раскрытия неопределённостей, который называется **правилом Лопиталя–Бернулли.** Основано это правило на следующей теореме.

7.2 Правило Лопиталя–Бернулли

Теорема 7.5. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на некотором интервале $(a;b)$, содержащем точку x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Пусть, далее, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ и $g'(x) \neq 0$ на $(a;b)$.

Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(c)}{g(c)}$, причём

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(c)}{g(c)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Пример 7.1. Найти $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Решение. Функции $f(x) = x^2-1+\ln x$ и $g(x) = e^x - e$ определены и дифференцируемы на $(\frac{1}{2};\frac{3}{2})$, причём $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$. Предел отношения производных этих функций существует:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x} = \frac{3}{e},$$

причём $g'(x) = e^x \neq 0$ для $x \in (\frac{1}{2};\frac{3}{2})$. Теперь по теореме Лопиталя–Бернулли существует $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причём

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{3}{e}.$$

Замечание 7.2. Теорема Лопиталя–Бернулли позволяет раскрывать неопределённости $\frac{0}{0}$.

Замечание 7.3. Обычно при вычислении пределов записывают только необходимые преобразования, а проверку выполнения условий теоремы Лопиталя–Бернулли делают по ходу вычислений. Если при этом окажется, что отношение производных снова представляет неопределённость $\frac{0}{0}$, то правило Лопиталя–Бернулли применяют повторно.

Пример 7.2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Замечание 7.4. Теорема Лопиталя–Бернулли остаётся верной и в случае, когда $x\to\infty,\ x\to+\infty,\ x\to-\infty.$

Пример 7.3.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-arctgx}{\frac{1}{2}\ell n\frac{x-1}{x+1}}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=-1.$$

Замечание 7.5. Если в теореме Лопиталя–Бернулли заменить требование

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=0 \quad \text{на условие} \quad \lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=\infty,$$

то теорема остаётся верной. В такой формулировке правило Лопиталя-Бернулли позволяет раскрывать неопределённости вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 7.4. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}{e^x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$

Замечание 7.6. Неопределённости вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ можно свести к неопределённостям вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, а затем раскрыть с помощью правила Лопиталя–Бернулли.

Пример 7.5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0+}x\ell nx$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0+}(x\ell nx)=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ell nx}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\left(1/x\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0+}(-x)=0.$

Пример 7.6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-tgx\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\cos x}{-\sin x}=0.$

Замечание 7.7. Неопределённости вида 0^0, 1^∞, ∞^0 имеют место при рассмотрении функций $y=f(x)^{g(x)}$. Эти неопределённости с помощью тождества

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

сводятся к неопределённостям, которые рассмотрены выше.

Пример 7.7. $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}=(1^\infty)=\lim\limits_{x\to0}e^{\ln(1+x^2)\frac{1}{e^x-1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)}{e^x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{(1+x^2)(e^x-1)}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2x(e^x-1)+e^x(1+x^2)}}=e^2.$

Пример 7.8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{2\cos x}=(\infty^0)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{2\cos x\ln tgx}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\frac{2\ln tgx}{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=$

$=e^{2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2x}\right)}{\left(\frac{\sin x}{\cos^2x}\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2x}}=e^0=1.$

Замечание 7.8. Однако правило Лопиталя–Бернулли не всегда применимо.

Пример 7.9. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Однако правило Лопиталя–Бернулли применить здесь нельзя, т. к.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}\text{ не существует.}$$

В таких случаях ищут методы раскрытия неопределённостей без правила Лопиталя–Бернулли.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте основные теоремы дифференциального исчисления.
2. В чем заключается теорема Ферма?
3. Каким условиям должна удовлетворять функция *f (x)* на отрезке $[a;b]$, чтобы для нее была справедлива теорема Ролля?
4. Сформулируйте теорему Лагранжа.
5. В чем заключается теорема Коши?
6. Какие неопределенности раскрывает правило Лопиталя–Бернулли?
7. Сформулируйте правило Лопиталя–Бернулли.

8 Исследование функций

8.1 Признаки возрастания и убывания функции. Асимптоты

8.1.1 Признаки возрастания и убывания функции

Определение 8.1. Функция $y = f(x)$ на интервале $(a;b)$ называется:

а) **постоянной,** если $f(x) = c$, где $c = \text{const}$, для любого $x \in (a;b)$;

б) **возрастающей,** если для любых двух значений $x_1, x_2 \in (a;b)$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$;

в) **убывающей,** если для любых двух значений $x_1, x_2 \in (a;b)$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Теорема 8.1. (достаточное условие возрастания и убывания функции). Если в данном промежутке производная функции положительна, то функция возрастает в этом промежутке; если производная отрицательна, то функция убывает в соответствующем промежутке; если же производная равна нулю, то функция постоянна на промежутке.

Доказательство. Рассмотрим функцию $y = f(x)$ на $(a;b)$. Возьмём произвольно $x_1, x_2 \in (a;b)$ такие, что $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \text{ где } c \in (x_1; x_2).$$

Возможны следующие случаи:

1) производная $f'(x) > 0$ на $(a;b)$. Тогда $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$ и поэтому $f(x_1) - f(x_2) > 0$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$. Следовательно, $f(x)$ возрастает на $(a;b)$;

2) производная $f'(x) > 0$ на $(a;b)$. Тогда $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$ и поэтому $f(x_1) - f(x_2) < 0$, т. е. $f(x_1) > f(x_2)$. Следовательно, функция $y = f(x)$ убывает на $(a;b)$;

3) производная $f'(x) = 0$ на $(a;b)$. Тогда $f'(c) = 0$, откуда $f(x_1) - f(x_2) = 0$, т. е. $f(x_1) = f(x_2)$.

Это означает, что функция $y = f(x)$ постоянна на $(a;b)$.

8.1.2 Асимптоты

Если график функции сколь угодно близко приближается к прямой, то такую прямую называют **асимптотой.** Различают вертикальные и наклонные асимптоты.

Определение 8.2. Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ является бесконечным.

Например, прямая $x = 2$ – вертикальная асимптота графика $y = \dfrac{6}{x-2}$, так как $\lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{6}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{6}{x-2} = +\infty$.

Определение 8.3. Предположим, что функция $y = f(x)$ определена при сколь угодно больших (по модулю) значениях аргумента. Для определённости будем рассматривать положительные значения аргумента. Прямая

$$y = kx + b$$

называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если эта функция представима в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$.

Теорема 8.2. (необходимые и достаточные условия существования асимптоты).

График функции $y = f(x)$ имеет при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту $y = kx + b$ тогда и только тогда, когда существуют два конечных предела

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - kx\right] = b. \tag{8.1}$$

Доказательство. Пусть график функции $y = f(x)$ имеет асимптоту $y = kx + b$. Тогда $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Обратно. Пусть существуют пределы (8.1). Тогда из равенства $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$ можем записать также, что $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx - b) = 0$. Это означает, что функция $\alpha(x) = f(x) - kx - b$ является бесконечно малой функцией при $x \to +\infty$. Отсюда $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ и по определению прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой.

Пример 8.1. Рассмотрим функцию $y = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}$.

Так как $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2 + x}{x - 1} : x\right) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x + 1}{x - 1} = 1$ и $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2 + x}{x - 1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x - 1} = 2$, то график функции имеет наклонную асимптоту $y = x + 2$.

8.2 Экстремум функции. Необходимое и достаточное условие экстремума

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определённую на промежутке $(a;b)$. Пусть $x_0 \in (a;b)$, δ – некоторое положительное число. Будем называть **δ-окрестностью точки** x_0 интервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ и обозначать его $O(x_0; \delta)$.

Определение 8.4. Если можно указать такую δ-окрестность точки x_0, принадлежащую $(a;b)$, что для всех $x \in O(x_0; \delta)$, $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$, то $y_0 = f(x_0)$ называют **максимумом функции $y = f(x)$** и обозначают через $\max f(x)$ (рисунок 8.1).

Если же для всех $x \in O(x_0; \delta)$, $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x_0) < f(x)$, то $y_0 = f(x_0)$ называют **минимумом функции $y = f(x)$** и обозначают через $\min f(x)$ (рисунок 8.2).

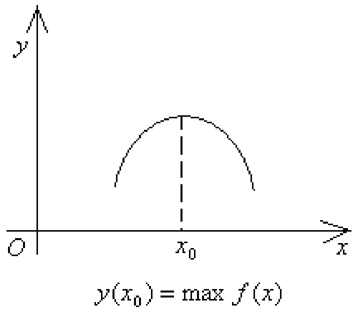

Рисунок 8.1

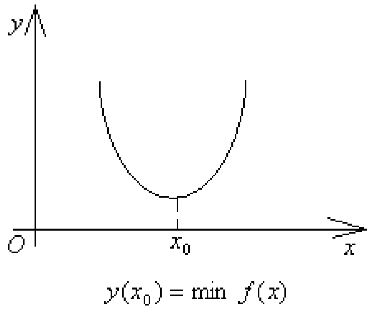

Рисунок 8.2

Отметим, что максимум и минимум функции имеют локальный характер (это наибольшее и наименьшее значение функции в достаточно малой окрестности соответствующей точки); отдельные минимумы некоторой функции могут оказаться больше максимумов той же функции (рисунок 8.3).

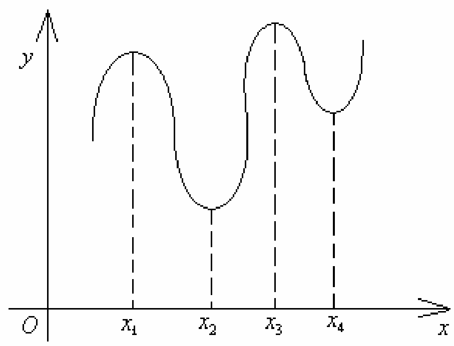

Рисунок 8.3

Определение 8.5. Максимум и минимум функции называют **экстремумом.** Значение аргумента, при котором достигается экстремум, называется **точкой экстремума.**

Теорема 8.3. (необходимое условие экстремума).

В точке экстремума дифференцируемой функции производная её равна нулю.

Доказательство. Пусть x_0 – точка экстремума дифференцируемой функции $f(x)$. Для определённости положим, что x_0 – точка максимума. Тогда для достаточно малых Δx ($|\Delta x| < \delta$, $\delta > 0$) $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$, поэтому $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$. Теперь

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0 \text{ при } \Delta x > 0;$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0 \text{ при } \Delta x < 0;$$

откуда
$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

Так как функция дифференцируема, то

$$0 \leq \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0,$$

откуда следует $f'(x_0) = 0$. Аналогично рассматривается случай, когда x_0 – точка минимума функции.

Замечание 8.1. Если $f'(x_0) = 0$, то отсюда ещё не следует, что x_0 – точка экстремума. Например, для функции $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$, но $x_0 = 0$ не является точкой экстремума, т. к. $f(x) > 0$ при $x > 0$ и $f(x) < 0$ при $x < 0$ (рисунок 8.4).

Замечание 8.2. Функция может достигать экстремума также в точке, в которой производная не существует. Например, функция $y = -|x+1|$ не имеет производной в точке $x_0 = -1$, но достигает в ней максимума (рисунок 8.5).

Функция $y = -(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ не имеют конечной производной в точке $x_0 = 0$, т. к. $y' = +(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}}$ при $x = x_0 = 0$ обращается в бесконечность, но в этой точке функция имеет минимум (рисунок 8.6).

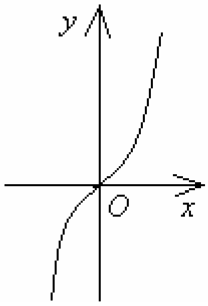

Рисунок 8.4

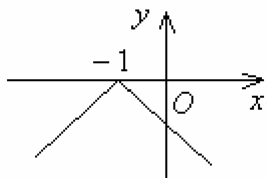

Рисунок 8.5

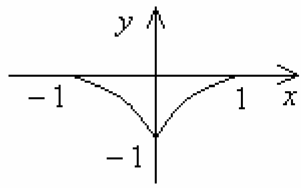

Рисунок 8.6

Определение 8.6. Точка, в которой производная равна нулю, называется **стационарной.** Стационарные точки, а также точки, в которых функция имеет бесконечную производную или в которой производная не существует, называются **критическими.**

Таким образом, точки экстремума следует искать среди критических точек.

Определение 8.7. Говорят, что **функция $y = f(x)$ меняет знак при переходе через точку $x = x_0$,** если $f(x_1)f(x_2) < 0$ для любых x_1, x_2 из некоторой окрестности этой точки, удовлетворяющих неравенствам $x_1 < x_0 < x_2$; знак меняется с плюса на минус, если $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$; знак меняется с минуса на плюс, если $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$.

Теорема 8.4. (достаточное условие экстремума).

Пусть функция $y = f(\text{x})$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Если в точке $x = x_0$ производная функции $f(x)$ равна нулю и меняет знак при переходе через точку x_0, то точка x_0 является точкой экстремума, причём: 1) x_0 – точка максимума, если знак меняется с плюса на минус; 2) x_0 – точка минимума, если знак меняется с минуса на плюс.

Доказательство. Пусть в точке x_0 производная равна нулю и меняет знак с минуса на плюс, т. е. $f'(x_0) = 0, f'(x) < 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$, $f'(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$ $(\delta > 0)$. Тогда функция $f(x)$ по теореме о достаточном условии возрастания и убывания функции убывает $(x_0 - \delta;\, x_0)$ и возрастает на интервале $(x_0;\, x_0 + \delta)$, т. е. $f(x_0) < f(x)$ для всех $x \in O(x_0, \delta) = (\text{x}_0 - \delta;\, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$. Следовательно, x_0 – точка минимума.

Аналогично рассматривается случай, когда производная меняет знак с плюса на минус.

Достаточное условие экстремума можно выразить также с помощью второй производной.

Теорема 8.5. (достаточное условие экстремума).

Если в точке $x = x_0$ первая производная дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 функции $y = f(x)$ равна нулю, а вторая производная отлична от нуля, то x_0 является точкой экстремума, причём: 1) x_0 – точка минимума, если $f''(x_0) > 0$; 2) x_0 – точка максимума, если $f''(x_0) < 0$.

Пример 8.2. Найти экстремумы функции $f(x) = x^4 - 10x^2 + 15$.

Решение. Поскольку $f'(x) = 4x^3 - 20x = 4x(x^2 - 5)$, то критическими являются только стационарные точки $x_1 = -\sqrt{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{5}$.

Исследуем знак второй производной $f''(x) = 12x^2 - 20$ в этих точках: $f''(-\sqrt{5}) = 12 \cdot 2 - 20 > 0, f''(0) = -20 < 0, f''(\sqrt{5}) = 12 \cdot 5 - 20 > 0.$

Следовательно, $x_1 = -\sqrt{5}$, $x_3 = \sqrt{5}$ – точки минимума, $x_2 = 0$ – точка максимума, причём $\min f(x) = f(-\sqrt{5}) = f(\sqrt{5}) = -10$, $\max f(x) = f(0) = 15$.

8.3 Интервалы выпуклости. Точки перегиба

Определение 8.8. График функции $y = f(x)$ называется **выпуклым вниз** в данном промежутке, если он целиком расположен выше касательной в его произвольной точке (рисунок 8.7). График функции $y = f(x)$ называется **выпуклым вверх** в данном промежутке, если он целиком расположен ниже касательной в его произвольной точке (рисунок 8.8).

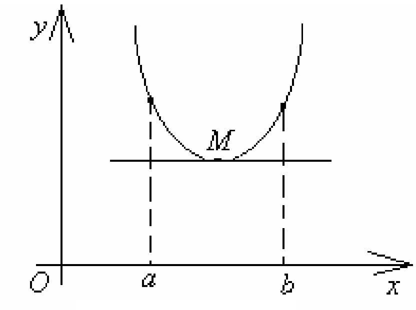

Рисунок 8.7

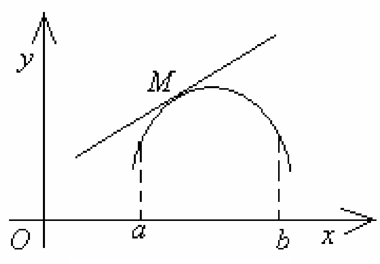

Рисунок 8.8

Теорема 8.6. (достаточный признак выпуклости графика функции).

Если вторая производная функции $y = f(x)$ положительна в данном промежутке, то график функции является выпуклым вниз в этом промежутке; если же вторая производная отрицательна в данном промежутке, то график функции является выпуклым вверх в этом промежутке.

Пример 8.3. Найти интервалы выпуклости графика функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

Решение. Найдём вторую производную функции $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$. Так как $f''(x) < 0$ при $x < 2$ и $f''(x) > 0$ при $x > 2$, то график функции является выпуклым вверх в интервале $(-\infty; 2)$ и выпуклым вниз – в интервале $(2; +\infty)$.

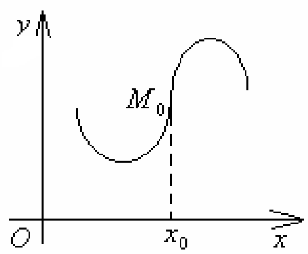

Рисунок 8.9

Определение 8.9. Точкой перегиба графика функции $y = f(x)$ называется такая его точка M_0 (рисунок 8.9), в которой меняется направление выпуклости.

Теорема 8.7. (достаточный признак существования точки перегиба).

Если в точке $x = x_0$ вторая производная функции $y = f(x)$ обращается в нуль и меняет знак при переходе через неё, то $M_0(x_0; f(x_0))$ – точка перегиба графика этой функции.

Например, в предыдущей задаче мы установили, что $f''(2) = 0$ и $f''(x)$ меняет знак при переходе через эту точку. Следовательно, $x = 2$ – точка перегиба графика функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

8.4 Схема исследования функции и построение графика

Под «исследованием функции» понимают изучение её поведения (изменения) в зависимости от изменения аргумента. На основании исследования функции строят её график, предварительно изображая характерные точки.

Исследование функций и построение графиков можно проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;
2) исследовать вопрос о чётности функции, о периодичности;
3) найти точки пересечения графика функции с осями координат;
4) изучить поведение функции при стремлении аргумента к концам промежутков области определения;
5) найти точки экстремумов, промежутки возрастания и убывания функции;
6) определить промежутки выпуклости функции, найти точки перегиба;
7) найти асимптоты графика функции.

Порядок исследования иногда целесообразно выбирать исходя из конкретных особенностей данной функции.

Пример 8.4. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ и построить её график.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте необходимый и достаточный признаки возрастания (убывания) функции в данной точке.
2. Дайте определения максимума и минимума функции.
3. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.
4. Какие значения аргумента (какие точки) называются критическими и как они находятся?
5. Сформулируйте достаточный признак существования экстремума.
6. Дайте определение выпуклости, вогнутости кривой.
7. Что называется точкой перегиба графика функции, как находятся эти точки?
8. Сформулируйте необходимый и достаточный признаки выпуклости и вогнутости кривой на заданном интервале.
9. Дайте определение асимптоты кривой. Как найти уравнения асимптот: вертикальных, горизонтальных, наклонных?
10. Изложите общую схему исследования функции и построение ее графика.

Литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2004. – 280 с.

2. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов / Н. Ш. Кремер. – М. : «Юнити». 1997 г. – 439 с.

3. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – М., 1978. – 352 с.

4. Яблонский, А. И. Высшая математика /А. И. Яблонский. – Мн. : Высшая школа, 2000. – 351 с.

5. Гусак, А. А. Задачи и упражнения по высшей математике / А. А. Гусак. – Мн. : Высшая школа, 1988. – 544 с.

6. Гурский, Е. И. Руководство к решению задач по высшей математике / Е. И. Гурский. – Мн. : Высшая школа, 1989. – 348 с.

7. Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П. С. Александров. – М. : Наука, 1979. – 512 с.

8. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / А. А. Бурдун [и др.]. – Мн. : Университетское, 1999. – 302 с.

9. Милованов, М. В. Алгебра и аналитическая геометрия / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. – Мн. : Вышэйшая школа, 1984. – 269 с.

10. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие по решению задач / А. А. Гусак. – Мн. : ТетраСистемс, 2001. – 288 с.

11. Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. – М. : Наука Гл. ред. физ.-мат. Лит., 2001. – 672 с.

12. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов / Н. С. Пискунов. – М.: Наука, 1970. – 560 с.

13. Бугров, Я. С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функция комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука,1981. – 506 с.

14. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок [и др.]. – Мн. : Вышэйшая школа, 1986. – 272 с.

15. Выготский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выготский. – М. : Наука, 1966. – 872 с.

16. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак [и др.]. – Мн. : ТетраСистемс, 2000. – 638 с.

Производственно-практическое издание

БУЗЛАНОВ Александр Васильевич
БОРОДИЧ Елена Николаевна
БОРОДИЧ Руслан Викторович
БОРОДИЧ Тимур Викторович

Высшая математика: аналитическая геометрия в пространстве и начала анализа

Практическое руководство

для студентов экономических специальностей вуза

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 21.11.2011. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,8.
Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 30. Заказ № 537

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
ЛИ № 02330/0549481 от 14.05.2009.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель.

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА:

аналитическая геометрия в пространстве и начала анализа

Гомель
2011